Mathias Sablé-Meyer
introlog@s-m.ac

7 Octobre 2019

# 0 Remarques préliminaires sur le DM

- Pour $n$ variables, une table complète comporte $2^n$ lignes
- Si vous utilisez $\oplus$, définisez le et prenez garde!
- "Si A, B" vs "A si B" vs "A seulement si B" vs "A si et seulement si B"

# 1 Validité

## 1.1 Méthode de vérification

Vérifier la validité des arguments suivants :

*i* $p, p \to q \overset{?}{\models} \neg p \to \neg q$

*ii* $p \to q \overset{?}{\models} q \to p$

*iii* $p \vee q, r \to p, r \overset{?}{\models} q$

*iv* $p \wedge q \overset{?}{\models} q \vee p$

*v* $p \to (q \to r), (q \to r) \to p, p \overset{?}{\models} r$

*vi* $(p \wedge q) \to r \overset{?}{\models} p \to (q \to r)$

*vii* $p \to q, \neg q \overset{?}{\models} p$

*viii* $p \leftrightarrow \neg q \overset{?}{\models} \neg(p \wedge q)$

## 1.2 Raisonnements sur les valuations

1. Prouver que :

   (a) Si $A \to B$ est une contradiction, alors A est une tautologie et B est une contradiction

   (b) $A \wedge B$ est une tautologie si et seulement si A est une tautologie et B est une tautologie

2. Réfuter l'énoncé suivant en donnant un contre-exemple:

   "Si $A \vee B$ est une tautologie, alors A est une tautologie ou B est une tautologie."

3. Prouver que si A et B n'ont aucune variable propositionnelle en commun, alors $A \vee B$ est une tautologie si et seulement si A est une tautologie ou B est une tautologie.

# 2 Inférences

Les inférences suivantes sont-elles valides ? Symboliser les inférences en langage propositionnel, et faire les tables de vérité correspondantes.

*i* S'il pleut, le match sera reporté.

Il ne pleut pas.

Donc, le match ne sera pas reporté.

*ii* Si Paul est logicien, il est riche.

Paul est riche.

Donc, Paul est logicien.

# 3 Preuve par induction

## 3.1 Pour s'échauffer

On définit les formules de taille $n$ de la façon suivante :

1. Pour toute lettre propositionelle p, la formule composée uniquement de p est de taille 1
2. Pour tout connecteur binaire $\bullet$, pour toute formule A et B de tailles respectives $m$ et $n$, la formule $A \bullet B$ est de taille $n + m + 1$.

Montrer qu'une formule de taille $n$ contient au plus $n$ lettres propositionelles

## 3.2 Raisonnement sur la complexité des formules

1. Voici deux définitions par induction sur les formules. Quelles sont les notions définies?
   (a) Pour toute lettre propositionnelle p, et pour tout connecteur binaire $\bullet$:
   $p^\star = 0$
   $(\neg\phi)^\star = (\phi)^\star$
   $(\phi \bullet \psi)^\star = \phi^\star + \psi^\star + 1$
   (b) Pour tout connecteur binaire $\bullet$:
   $p^+ = 1$
   $(\neg\phi)^+ = \phi^+$
   $(\phi \bullet \psi)^+ = \phi^+ + \psi^+$
2. Prouver par induction sur toutes les formules que: $\phi^+ = \phi^\star + 1$

## 3.3 Preuves pour la substitution

**Def. 1** (substitution). *Une substitution $\sigma$ est une fonction des atomes dans les formules que l'on généralise aux formules de la façon suivante :*

1. $\sigma(\neg A) = \neg\sigma(A)$
2. Pour tout connecteur binaire $\bullet$, $\sigma(A \bullet B) = \sigma(A) \bullet \sigma(B)$

**Def. 2**. *Soit une valuation $v$ et une substitution $\sigma$, on définit $v^\sigma(p) := v(\sigma(p))$*

**Lemme 1**. *Pour tout $\sigma$, pour tout $v$, pour toute formula $A$, on a :*

$$v(\sigma(A)) = v^\sigma(A)$$

Exercice : preuve du lemme 1.