Mathias Sablé-Meyer
introlog@s-m.ac

4 Novembre 2019

Méthode des arbres

- Établir, par la méthode des arbres, les preuves suivantes:

  (*i*) $p \land (q \land r) \vdash r \land p$

  (*ii*) $p \to (q \land r), r \to s, p \vdash s$

  (*iii*) $p \to (p \to q) \vdash p \to q$

  (*iv*) $p \land \neg q \vdash \neg(p \to q)$

  (*v*) $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

  (*vi*) $p \to \neg q \vdash q \to \neg p$

  (*vii*) $p \to q, r \lor \neg q, \neg(p \land q) \vdash \neg p$

  (*viii*) $(p \to q) \to r, \neg s \lor t, \neg(p \land \neg s), \neg q \to \neg t \vdash r$

  (*ix*) $p \to q, r \to s \vdash (p \lor r) \to (q \lor s)$

  (*x*) $p \to (q \lor r), (q \lor s) \to \neg p, \neg q, \neg(p \to q), \neg(r \land s) \vdash \neg q$

1 Traduction en logique des prédicats

Traduisez les phrases suivantes en des énoncés de la logique des prédicats:

(*i*) Une porte est ouverte ou fermée.

(*ii*) Toutes les vérités sont dans la bible.

(*iii*) Les grenouilles sont plus intelligentes que certains humains.

(*iv*) Si les grenouilles sont plus intelligentes que certains humains, alors il y a une grenouille plus intelligente que certains humains.

(*v*) Tout ce qui brille n'est pas or.

(*vi*) Il y a des peines et il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir.

(*vii*) Les seules peines qui soient un plaisir sont les peines d'amour.

(*viii*) Il y a des bonnes actions qui ne sont pas récompensées, mais aucune mauvaise action n'est récompensée.

(*ix*) Certains l'aiment chaud.

2 Ensembles et sémantique

Soit la structure d'interprétation $M = (D_M, I_M)$ avec D_M l'ensemble des cartes d'un jeu de cartes à jouer standard. On se donne des symboles de prédicats idoines — les deux couleurs N et R, les types P, H, T et C et les hauteurs $H_1, H_2, \ldots, H_R$, et les prédicats binaires infixes de comparaison de hauteur $>^2$, $<^2$, $\geq^2$ et $\leq^2$

On va désigner les cartes avec des conventions similaires mais en minuscule: $c_{p1}, c_{p2}, \ldots, c_{pr}, c_{co1}, c_{co2}, \ldots$

Ainsi par définition, $I_M(Pc_{p1}) = I_M(Pc_{p2}) = \ldots = 1$

Déterminer si les formules suivants sont vraies ou fausses dans M:

(*i*) $\exists x(Hx)$

(*ii*) $\forall x(Hx)$

(*iii*) $\forall x(Nx \vee Rx)$

(*iv*) $\exists x(Nx \wedge Rx)$

(*v*) $\forall x(Hx \to Rx)$

(*vi*) $\exists x(Hx \to Nx)$

(*vii*) $\exists x(Nx \to Hx)$

(*viii*) $\forall x \forall y(Nx \vee Ry)$

(*ix*) $\forall x \forall y(Tx \wedge Ty) \to ((x > y) \vee (x < y))$

(*x*) $\forall x \forall y(Tx \wedge Ty) \to ((x \geq y) \vee (x \leq y))$

(*xi*) $\forall x \exists y(Tx \wedge Ty) \to (x > y)$

(*xii*) $\forall x \exists y(Tx \wedge Ty) \to (x \geq y)$

(*xiii*) $\forall x \exists y(Tx \wedge Ty) \wedge (x \geq y) \wedge (x \leq y)$

(*xiv*) $\exists x \neg(\exists y(Tx \wedge Ty) \wedge (x \geq y))$

3 Substitution

Pour chaque formule ϕ, écrire $\phi[c/x]$

(*i*) Axy

(*ii*) Axx

(*iii*) $\forall x Axx$

(*iv*) Ay

(*v*) Acx

(*vi*) $Axx \wedge \exists x Bx$

(*vii*) $\forall x By$

(*viii*) $\exists x \exists y Axy \to Bx$

(*ix*) $\forall x \forall y Ayy \to Bx$