

Mathias Sablé-Meyer  
introlog@s-m.ac

18 Novembre 2019

## 1 Traductions

1. Il existe un carré vert et rouge
2. Pour tout couple de nombre tels que le premier est plus petit que le second, il existe un 3e nombre strictement plus grand que le premier et plus petit que le second
3. Aucun lion qui ne mange des antilopes ne mange de giraffes
4. Personne ne porte plus de deux chaussures

## 2 Relations

### 2.1 Définitions:

Écrivez en logique des prédicats les relations binaires intuitivement définies ici et donner des exemples de telles relations:

- i* Une relation *réflexive* est une relation qui relie tout élément à lui-même.
- ii* Une relation *antiréflexive* est une relation telle qu'aucun élément n'est relié à lui-même.
- iii* Une relation *symétrique* est une relation telle que si elle relie deux éléments dans un sens, elle les relie aussi dans l'autre sens.
- iv* Une relation *antisymétrique* est une relation telle qu'elle ne relie jamais deux éléments distincts dans les deux sens.
- v* Une relation *transitive* est une relation telle que si elle relie trois éléments deux à deux, alors elle relie le premier au troisième.
- vi* Une relation *totale* est une relation telle que chaque élément est relié à un autre élément.
- vii* Une relation d'*équivalence* est une relation réflexive, transitive et symétrique.
- viii* Une relation d'*ordre* est une relation réflexive, transitive et antisymétrique.

### 2.2 Sémantique

- Soit le langage  $L = \{P^2\}$  et le modèle  $M = \langle D, I \rangle$  tel que:

$$D = \{a, b, c\}$$

$$I(P) = \{(a, b), (c, b), (b, b), (b, a), (a, c)\}$$

- i* Faire le graphe du modèle.  
*ii* Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vrais: Paa, Pbc, Pab, Pbb, Pcc, Pac?  
*iii* Les formules suivantes sont-elles vraies dans le modèle:

- |                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| (a) $\exists xPxb$          | (d) $\exists x\forall yPxy$        |
| (b) $\forall xPxb$          | (e) $Pab \rightarrow \exists xPxb$ |
| (c) $\exists x\forall yPyx$ | (f) $\forall xPxb \rightarrow Pbb$ |

### 2.3 Structures d'interprétation:

Construisez une structure qui rend vrais les énoncés suivants.

- |   |   |
|---|---|
| <i>i</i> <i>Everybody saw someone.</i>                | <i>iii</i> "Pour tout homme, on peut trouver une femme qui parle de lui comme d'un lâche" ( <i>Fragments d'un discours amoureux</i> , R. Barthes) |
| <i>ii</i> <i>If a man owns a Donkey, he beats it.</i> |   |

## 3 Substitution

Pour chaque formule  $\phi$ , écrire  $\phi[c/x]$

- |                      |   |
|----------------------|---|
| (i) $Axy$            | (vi) $Axx \wedge \exists xBx$                 |
| (ii) $Axx$           | (vii) $\forall xBy$                           |
| (iii) $\forall xAxx$ | (viii) $\exists x\exists yAxy \rightarrow Bx$ |
| (iv) $Ay$            | (ix) $\forall x\forall yAyy \rightarrow Bx$   |
| (v) $Acx$            |   |

## 4 Validité en logique des prédicats

- Rappeler la définition de la conséquence logique en logique des prédicats
- Les inférences suivantes sont-elles valides? (justifiez votre réponse)

- |   |   |
|---|---|
| ?? $\forall xPx \models \exists xPx$                                | ?? $\exists x(Px \wedge Qx) \models \exists x(Px \rightarrow Qx)$ |
| ?? $\exists xPx \models \forall xPx$                                | ?? $\exists x(Px \rightarrow Qx) \models \exists x(Px \wedge Qx)$ |
| ?? $\exists x(Px \wedge Qx) \models \exists xPx \wedge \exists xQx$ | ?? $\forall x(Px \rightarrow Qx) \models \forall x(Px \wedge Qx)$ |
| ?? $\exists xPx \wedge \exists xQx \models \exists x(Px \wedge Qx)$ | ?? $\forall x(Px \wedge Qx) \models \forall x(Px \rightarrow Qx)$ |