Mathias Sablé-Meyer
introlog@s-m.ac

Mercredi 28 novembre 2018

1 Validité (et invalidité)

Définition: Rappeler la définition de la conséquence sémantique en logique déductive.

1.1 Logique propositionnelle

1.1.1 Tables de vérité

Montrer la validité (ou l'invalidité) des inférences suivantes:

1. $(p \land q) \to r \overset{?}{\models} p \to (q \to r)$
2. $p \to q, \neg q \overset{?}{\models} p$
3. $p \leftrightarrow \neg q \overset{?}{\models} \neg(p \land q)$

1.1.2 Valuations

Montrer pour ϕ et ψ des formules de logique propositionnelle:

1. Si $\phi \to \psi$ est une contradiction, alors ϕ est une tautologie et ψ est une contradiction.
2. $\phi \land \psi$ est une tautologie si et seulement si ϕ est une tautologie et ψ est une tautologie.
3. Ce n'est pas le cas que si $\phi \lor \psi$ est une tautologie, alors ϕ est une tautologie ou ψ est une tautologie.

1.2 Logique des prédicats

1.2.1 Structures d'interprétation

- Soit le langage $L = \{P^2\}$ et le modèle $M = \ < D, I >$ tel que:

$$D = \{a, b, c\}$$

$$I(P) = \{(a, b), (c, b), (b, b), (b, a), (a, c)\}$$

  i Faire le graphe du modèle.

ii Les formules suivantes sont elles vraies dans le modèle:

(a) $\exists x Pxb$
(b) $\forall x Pxb$
(c) $\exists x \forall y Pyx$
(d) $\exists x \forall y Pxy$
(e) $Pab \to \exists x Pxb$
(f) $\forall x Pxb \to Pbb$

2 Preuves

Important: Différence entre $\models$ et $\vdash$

2.1 Logique propositionnelle

2.1.1 Arbres / Tableaux

- Établir, par la méthode des tableaux, les preuves suivantes:

  1. $p \to q, r \vee \neg q, \neg(p \wedge q) \vdash \neg p$
  2. $(p \to q) \to r, \neg s \vee t, \neg(p \wedge \neg s), \neg q \to \neg t \vdash r$
  3. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow p \vdash q$
  4. $p \to q, r \to s \vdash (p \vee r) \to (q \vee s)$

2.1.2 Système de Hilbert

- Les axiomes de Hilbert sont les suivants:

  Ax.1: $p \to (q \to p)$
  Ax.2: $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
  Ax.3: $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$

  Plus le Modus Ponens

- Faire les preuves suivantes dans le système de Hilbert:

  1. $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$
  2. $p \to r, p \to (r \to q) \vdash p \to q$

2.1.3 Preuve par réécriture

- Prouver, par réécritures successives, que les formules suivantes sont des tautologies ou des contradictions.

  1. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
  2. $\neg(p \to (q \to p))$
  3. $(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow r) \vee (p \leftrightarrow r)$

2.2 Logique des prédicats

2.2.1 Arbres / Tableaux

- Vérifier les inférences suivantes en utilisant la mééthode des tableaux. Si le tableau de ferme pas, construisez un contre-exemple qui invalide l'inférence.

  1. $\exists x(Px \lor Qx) \vdash \exists x Px \lor \exists x Qx$
  2. $\exists x(Px \to Qx) \vdash \forall x \neg Qx$
  3. $\exists x(Px \to Qx), \exists x \neg Px \vdash \forall x \neg Qx$
  4. $\forall x(Px \to \exists y Sxy) \vdash \forall x \exists y(Px \to Sxy)$
  5. $\exists x(Px \to \forall y Qy) \vdash \exists x Px \to \forall y Qy$
  6. $\vdash \forall x \exists y Sxy \to \exists x Sxx$
  7. $\exists x \neg \exists y Sxy \vdash \exists x \forall y Sxy$

2.2.2 Preuves par réécriture

- Vérifier les équivalences suivantes par la méthode de la réécriture:

  1. $\forall x(Fx \lor Gx) \land \forall x(Fx \lor \neg Gx) \equiv \forall x Fx$
  2. $\forall x(Fx \land Gx) \lor \forall x(Fx \land \neg Gx) \equiv \forall x Fx$
  3. $\exists x(Fx \lor Gx) \land \exists x(Fx \lor \neg Gx) \equiv \exists x Fx$
  4. $\exists x(Fx \land Gx) \lor \exists x(Fx \land \neg Gx) \equiv \exists x Fx$

Méta-théorèmes importants

Théorème d'adéquation: Si ϕ est conséquence syntaxique de ψ, alors ϕ est conséqance sémantique de ψ.

Théorème de complétude: Si ϕ est conséquence sémantique de ψ, alors ϕ est conséqance syntaxique de ψ.

- Les démonstrations de ces théorèmes sont l'objet d'un cours de logique avancée.

3 Traduction

3.1 Logique propositionnelle

3.1.1 Le conditionnel

3.1.2 Interdéfinissabilité des connecteurs

1. Traduisez $p \to q$ uniquement en termes de disjonction et de négation.

2. Traduisez $p \leftrightarrow q$ uniquement en termes de disjonction et de négation.

3. Voici la table de vérité de la barre de Nicod:

p	q	p|q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

   (a) Traduisez $p \wedge q$ en utilisant uniquement la barre de Nicod.
   (b) Traduisez $p \vee q$ en utilisant uniquement la barre de Nicod.
   (c) Traduisez $p \to q$ en utilisant uniquement la barre de Nicod.
   (d) Traduisez $\neg p$ en utilisant uniquement la barre de Nicod.

3.2 Logique des prédicats

3.2.1 Sans identité

- Traduisez, en logique des prédicats sans identité, les phrases suivantes:
  1. Tout le monde a vu quelqu'un.
  2. Si un humain possède un chien, alors il le chérit.
- Traduisez les définitions suivantes en logique des prédicats sans identité:
  - Une relation *totale* est une relation telle que toute paire d'éléments est reliée.
  - Une relation *antisymétrique* est une relation telle qui ne relie jamais deux éléments distincts dans les deux sens.
  - Une relation d'*ordre* est une relation réflexive, transitive et antisymétrique.

3.2.2 Avec identité

- Traduisez, en logique des prédicats avec identité, les phrases suivantes:
  - Tous les élèves connaissent au moins un professeur.
  - Exactement deux élèves connaissent chacun tous les professeurs.
  - Exactement deux élèves connaissent chacun exactement deux professeurs.
  - Tous les élèves connaissent le professeur principal.